11-11-15

Κρουστικά κύματα (Shock waves)

Εξίσωση (B) $u_t + u u_x = 0$, $u : U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (x, t)
(Burgers)

<u>Ερμηνεία</u>: $u(x(t),t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$ (*) ταχύτητα του σωματιδίου που βρίσκεται στη θέση (του χώρου $\mathbb{R}$) $x(t)$ κατά την χρονική στιγμή t.

$$(*) \Rightarrow \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = u_x(x(t),t)\frac{dx(t)}{dt} + u_t(x(t),t) \overset{(B)}{=} 0$$

$\Rightarrow$ επιτάχυνση του σώματος $x(t)$ είναι μηδενική

$\Rightarrow$ ταχύτητα είναι σταθερή, δηλ. $u(x(t),t) = c,\ \forall t$

$\Rightarrow$ σωματίδια που κινούνται γρήγορα φτάνουν τα σωματίδια που κινούνται πιο αργά.

$\Rightarrow$ σύγκρουση (κρούση) σωματιδίων

Πιο μαθηματικά και γενικά

ΠΑΤ: $(\Gamma)\ \begin{cases} u_t + c(u)u_x = 0, & \text{στο } U = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2, t > 0\} \\ u(x,0) = \varphi(x) & \text{στο } \partial U = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2, t = 0\} \end{cases}$

με $c, \varphi \in C^1(\mathbb{R})$ και $c' > 0$

1ο ερώτημα: Υπολόγισε τη λύση

$\gamma(s) = (x(s), t(s))$, $\gamma(0) = (x_0, t_0) \in U$.

$z(s) = u(\gamma(s)) = u(x(s), t(s))$, $z(0) = u(x_0, t_0)$

$$\dot{z}(s) = u_x(\gamma(s)) \cdot \underbrace{\dot{x}(s)}_{=c(u)=c(z)} + u_y(\gamma(s)) \underbrace{\dot{t}(s)}_{=1} \overset{(\Gamma)}{=} 0$$

$\Rightarrow z(s) = z(0) = u(x_0, t_0)$, $\forall s \in (-r, r)$, $r>0$

$t(s) = s + t_0$

και $\dot{x}(s) = c(z(s)) = c(u(x_0,t_0))$, $x(0) = x_0 \Rightarrow$

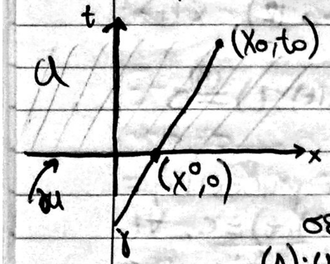
$x(s) = s\, c(u(x_0,t_0)) + x_0$

Συνεπώς η χαρακτηριστική καμπύλη είναι η ευθεία

$x(s) = (t(s) - t_0)\, c(u(x_0,t_0)) + x_0$

Πως μεταφέρεται η «πληροφορία» στο $t=0$;

Η γ τέμνει το ∂U τη χρονική στιγμή $t(\bar{s}) = 0 \Leftrightarrow$
$\bar{s} + t_0 = 0 \Leftrightarrow \bar{s} = -t_0 \Rightarrow$ η θέση στο σύνορο τη χρονική στιγμή $t(\bar{s}) = 0$: $x(\bar{s}) = \bar{s}\, c(u(x_0,t_0)) + x_0 =$
$= x_0 - c(u(x_0,t_0))\, t_0 =: x^0$



Συνεπώς

$z(\bar{s}) = u(x_0, t_0)$

$u(x(\bar{s}), t(\bar{s})) = u(x^0, 0) = \varphi(x^0) = \varphi(x_0 - c(u(x_0,t_0))\, t_0)$

Δηλαδή, βρήκαμε την λύση του ΠΑΤ(Γ) σε πεπλεγμένη μορφή ως:

$$(\Lambda): u(x,t) = \varphi(x - c(u(x,t))\, t), \ \forall (x,t) \in U \ (\text{σίγουρα } \forall (x,t))$$

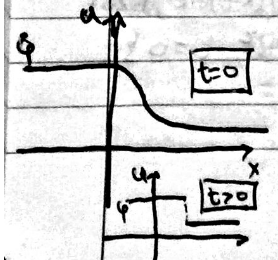
Μελέτη της (Λ)

• $\frac{\partial}{\partial x} u(x,t) = u_x(x,t) = \varphi'(x - tc(u(x,t)))(1 - tc'(u(x,t))\, u_x(x,t))$

$$\Leftrightarrow u_x(x,t) = \frac{\varphi'(x - tc(u(x,t)))}{1 + \underbrace{t}_{\geq 0}\, \underbrace{c'(u(x,t))}_{>0}\, \underbrace{\varphi'(x - tc(u(x,t)))}_{\text{αν } <0,\ \text{δηλ. } \varphi \text{ φθίνουσα}}}$$

Αν $\varphi' < 0$, τότε $u_x(x,t) \xrightarrow{t \to t_0} -\infty$

(έκρηξη της λύσης) $\Rightarrow \nexists$ λύση $\forall t \geq 0$



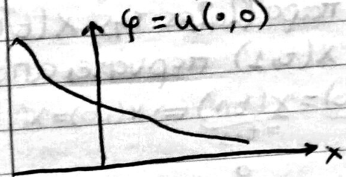
• Είδαμε $X(t) = (t-t_0)\, c(u(x_0,t_0)) + x_0$

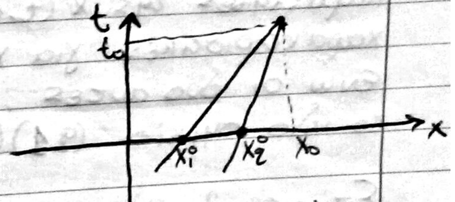
$$\frac{dX(t)}{dt} = c(u(x_0,t_0)) = \varphi(\underbrace{x_0 - c(u(x_0,t_0))\,t_0}_{=x^0})$$

Δηλαδή, η κλίση της χαρακτηριστικής είναι σταθερή και εξαρτάται από το c και την αρχική τιμή $\varphi(x^0)$.
<u>Άρα</u> (έστω η ακόλουθη περίπτωση), αν φ γν. φθίνουσα
$\overset{\varphi\in C^1}{\iff} \varphi'<0 \xrightarrow{c'>0} (c\circ\varphi)'<0 \iff c\circ\varphi$ φθίνουσα, δηλ.

$$x_1^0 < x_2^0 \implies (c\circ\varphi)(x_1^0) > (c\circ\varphi)(x_2^0) \iff \frac{1}{(c\circ\varphi)(x_1^0)} < \frac{1}{(c\circ\varphi)(x_2^0)}$$

$\iff$ η χαρακτηριστική που περνάει απ' το x_1^0 έχει μεγαλύτερη κλίση (ως συνάρτηση του t) από την αντίστοιχη του x_2^0)





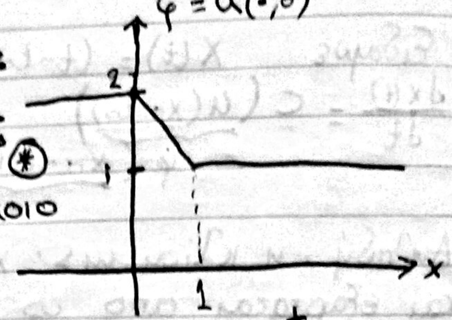
Παρατηρούμε λοιπόν ότι οι χαρακτηριστικές ευθείες που περνάνε από τα x_1^0, x_2^0 <u>τέμνονται!</u> στο (x_0,t_0)
$\implies$ στο (x_0,t_0) δεν ορίζεται η $u(x_0,t_0)$ γιατί δεν είναι σαφές ποια χαρακτηριστική (πρέπει) να ακολουθήσουμε. Δηλαδή, η μέθοδος χαρακτηριστικών υποθέτει ότι $u\in C^1$.

<u>Παράδειγμα</u>

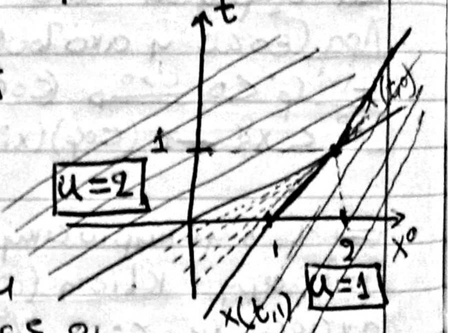
ΠΑΤ $\begin{cases} u_t + uu_x = 0, & U=\{(x,t)\in\mathbb{R}^2 : t>0\} \\ u(x,0)=\varphi(x), & \text{στο } \partial U \end{cases}$

(εξειδίκευση του προηγούμενου ΠΑΤ: εδώ έχουμε $c(u)=u$ και έστω $\varphi(x) = \begin{cases} 2, & x\le 0 \\ 2-x, & x\in[0,1] \\ 1, & x\geq 1 \end{cases}$

Σύμφωνα με αυτά που είπαμε:
έχουμε χαρακτηριστικές της
μορφής $x(t,x^0)=\varphi(x^0)\,t+x^0$ (*).
(το x^0 υποδηλώνει από ποιο
σημείο του συνόλου περνάει
η χαρακτηριστική $x(t)$)



(*) εδώ $\begin{cases} 2t+x^0, & x^0\le 0 \\ (2-x^0)t+x^0, & x^0\in[0,1] \\ t+x^0, & x^0\ge 1 \end{cases}$



Παρατηρούμε, ότι για όλα τα
$x_0<0$, οι χαρακτηριστικές είναι
παράλληλες της $x(t,0)$ και όλες οι
χαρακτηριστικές για $x_0>1$, είναι παράλληλες της $x(t,1)$
ενώ οι δυο αυτές, $x(t,0)$ και $x(t,1)$ περνάνε από
το ίδιο σημείο $(2,1)$ (αφού $\underbrace{x(t,0)}_{=2t}=\underbrace{x(t,1)}_{=t+1}\Leftrightarrow x(1,0)=x(1,1)$)

Επίσης, όλες οι χαρακτηριστικές για $x^0\in(0,1)$ περνάνε
από το ίδιο σημείο $(2,1)$ αφού $x(\underset{t=1}{1},x^0)=(2-x^0)+x^0=$
$=2,\ \forall x^0\in(0,1)$

Η λύση εδώ μπορεί να γραφεί ρητά, τουλάχιστον
για $\boxed{t<1}$. Γενικά είχαμε βρει ως λύση την εξί-
σωση $u(x,t)=\varphi(x-c(u(x,t))\,t)\overset{\text{εδώ}}{=}\varphi(x-u(x,t)\,t)$

Εδώ, έχουμε λοιπόν την λύση

- $u(x,t)=2$, αν (ή για όσο ισχύει) $x-u(x,t)t<0$,
  δηλαδή για $x-2t\le 0\Leftrightarrow x\le 2t$
- $u(x,t)=1$, αν (ή για όσο) $x-u(x,t)t\ge 1$, δηλ. $x\ge 1+t$.
- $u(x,t)=2-x+u(x,t)t$, αν $x-u(x,t)t\in[0,1]$, δηλ.

$\Leftrightarrow u(x,t)=\dfrac{2-x}{1-t}$ $\qquad x-\dfrac{2-x}{1-t}t\in[0,1]$

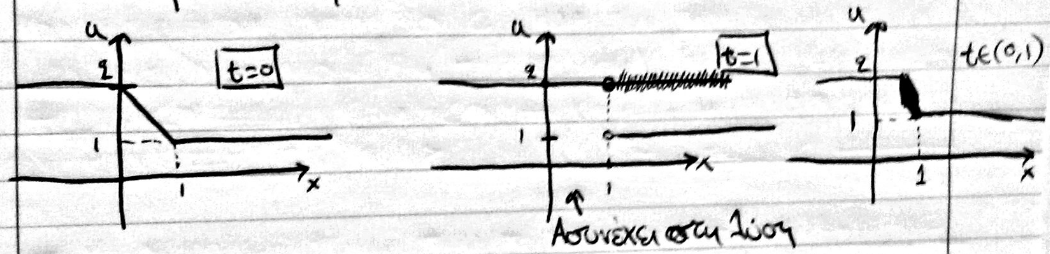
$\Leftrightarrow x\in[2t,1+t]$

Αυτό είναι ένα σχήμα αφού $1 \leq \frac{2-x}{1-t} \leq 2$. (Άρα είναι λάθος)

έκρηξη. (το t πηγαίνει προς το 1)

Παρατηρούμε ότι για $t \nearrow 1$ και $x \in [2t, 1+t]$ η λύση $\boxed{u(x(t),t) \longrightarrow \infty}$?? και όπως είδαμε πριν στη γενική περίπτωση $u_x(x,t) = \frac{-1}{1-t} \xrightarrow{t \to 1} -\infty$

As δούμε τι συμβαίνει στην έκρηξη



Γενικά, υπολογισμός χρόνου θραύσης:

είδαμε $u_x(x,t) = \dfrac{\varphi'(x - c(u(x,t))t)}{1 + \varphi'(\underbrace{x - c(u(x,t))t}_{=m})\, c'(u(x,t))\, t}$ $\overset{(\Delta)}{=} \varphi(\underbrace{x - c(u(x,t))t}_{=m})$

$\Rightarrow$ ο χρόνος θραύσης t_θ, όπου $1+\varphi'(m)c'(\varphi(m))t_\theta = 0$ και αυτός είναι ο μικρότερος (ελάχιστος) θετικός χρόνος που συμβαίνει αυτό και άρα, ορίζεται ως

$$\boxed{t_\theta = \inf_{m \in \mathbb{R}} \left(-\frac{1}{\varphi'(m)c'(\varphi(m))} \right)}$$

Ασκ: Για την εξίσωση Burgers στο $\{t > 0\}$ με $u(x,0) = \varphi(x) = \begin{cases} 1-x^2, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$, βρείτε τις χαρακτηριστικές, την λύση και τον χρόνο θραύσης t_θ (στον οποίο παρουσιάζονται ασυνέχειες)